

Rácsok optimális kövezése

Katona Gyula Y.

Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2026. március 4.



Bevezetés

A **kövezés** (pebbling) egy egyszemélyes matematikai játék, melyet **M. Saks** és **J. Lagarias** vezetett be.

Alkalmazások:

- Számelmélet



Bevezetés

A **kövezés** (pebbling) egy egyszemélyes matematikai játék, melyet **M. Saks** és **J. Lagarias** vezetett be.

Alkalmazások:

- Számelmélet
- Erőforrások optimális elhelyezése egy hálózatban



Kövezés?



Kövezés?



Ü EGYETEM 1762

Bevezetés

A **murvázás** (rubbling) a **kövezés** egy kiterjesztése, melyet **Belford és Sieben** vezetett be 2009-ben.



Kövek



Murva

Bevezetés

A **murvázás** a **kövezés** egy kiterjesztése, melyet **Belford és Sieben** vezetett be 2009-ben.

Definíció (murvázás)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás



Bevezetés

A **murvázás** a **kövezés** egy kiterjesztése, melyet **Belford és Sieben** vezetett be 2009-ben.

Definíció (murvázás)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás
- **Lépéssorozat:** Vegyünk el 2 követ a v csúcs szomszédságából, és tegyünk 1 követ v -re.



Bevezetés

A **murvázás** a **kövezés** egy kiterjesztése, melyet **Belford és Sieben** vezetett be 2009-ben.

Definíció (murvázás)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás
- **Lépéssorozat:** Vegyünk el 2 követ a v csúcs szomszédságából, és tegyünk 1 követ v -re.
- **Cél:** Elérni egy olyan $q: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlást, amely teljesít egy adott feltételt.

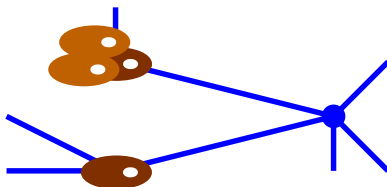


Bevezetés

A **murvázás** a **kövezés** egy kiterjesztése, melyet Belford és Sieben vezetett be 2009-ben.

Definíció (murvázás)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás
- **Lépéssorozat:** Vegyünk el 2 követ a v csúcs szomszédságából, és tegyünk 1 követ v -re.
- **Cél:** Elérni egy olyan $q: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlást, amely teljesít egy adott feltételt.

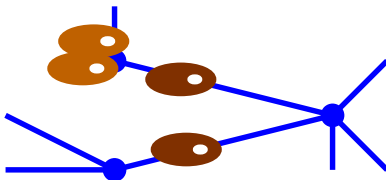


Bevezetés

A **murvázás** a **kövezés** egy kiterjesztése, melyet Belford és Sieben vezetett be 2009-ben.

Definíció (murvázás)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás
- **Lépéssorozat:** Vegyünk el 2 követ a v csúcs szomszédságából, és tegyünk 1 követ v -re.
- **Cél:** Elérni egy olyan $q: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlást, amely teljesít egy adott feltételt.

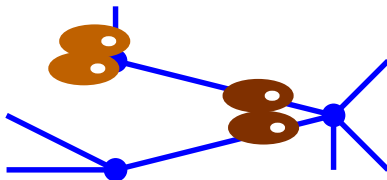


Bevezetés

A **murvázás** a **kövezés** egy kiterjesztése, melyet Belford és Sieben vezetett be 2009-ben.

Definíció (murvázás)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás
- **Lépéssorozat:** Vegyünk el 2 követ a v csúcs szomszédságából, és tegyünk 1 követ v -re.
- **Cél:** Elérni egy olyan $q: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlást, amely teljesít egy adott feltételt.

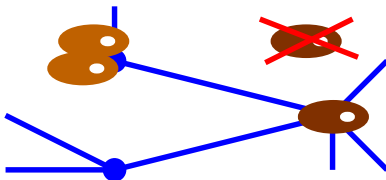


Bevezetés

A **murvázás** a **kövezés** egy kiterjesztése, melyet **Belford és Sieben** vezetett be 2009-ben.

Definíció (murvázás)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás
- **Lépéssorozat:** Vegyünk el 2 követ a v csúcs szomszédságából, és tegyünk 1 követ v -re.
- **Cél:** Elérni egy olyan $q: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlást, amely teljesít egy adott feltételt.



Kövezés és murvázás

A **kövezés** a **murvázás** egy korlátozott változata.



Kövezés és murvázás

A **kövezés** a **murvázás** egy korlátozott változata.

Definíció (kövezés)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás



Kövezés és murvázás

A **kövezés** a **murvázás** egy korlátozott változata.

Definíció (kövezés)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás
- **Lépéssorozat:** Vegyünk el 2 követ a v csúcs **egyik szomszédjáról**, és tegyünk 1 követ v -re.



Kövezés és murvázás

A **kövezés** a **murvázás** egy korlátozott változata.

Definíció (kövezés)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás
- **Lépéssorozat:** Vegyünk el 2 követ a v csúcs **egyik szomszédjáról**, és tegyünk 1 követ v -re.
- **Cél:** Elérni egy olyan $q: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlást, amely teljesít egy adott feltételt.

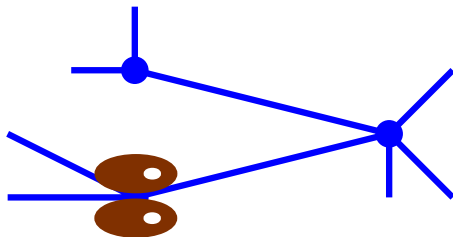


Kövezés és murvázás

A **kövezés** a **murvázás** egy korlátozott változata.

Definíció (kövezés)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás
- **Lépéssorozat:** Vegyünk el 2 követ a v csúcs **egyik szomszédjáról**, és tegyünk 1 követ v -re.
- **Cél:** Elérni egy olyan $q: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlást, amely teljesít egy adott feltételt.

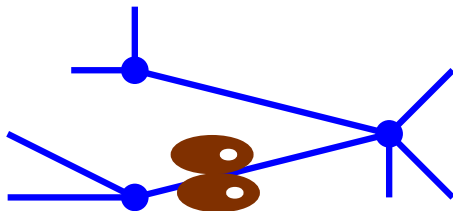


Kövezés és murvázás

A **kövezés** a **murvázás** egy korlátozott változata.

Definíció (kövezés)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás
- **Lépéssorozat:** Vegyünk el 2 követ a v csúcs **egyik szomszédjáról**, és tegyünk 1 követ v -re.
- **Cél:** Elérni egy olyan $q: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlást, amely teljesít egy adott feltételt.

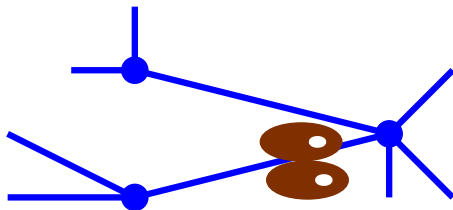


Kövezés és murvázás

A **kövezés** a **murvázás** egy korlátozott változata.

Definíció (kövezés)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás
- **Lépéssorozat:** Vegyünk el 2 követ a v csúcs **egyik szomszédjáról**, és tegyünk 1 követ v -re.
- **Cél:** Elérni egy olyan $q: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlást, amely teljesít egy adott feltételt.

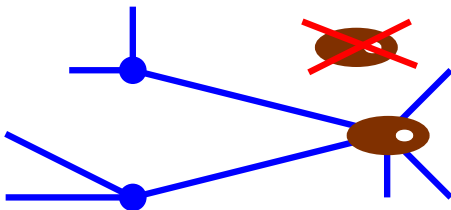


Kövezés és murvázás

A **kövezés** a **murvázás** egy korlátozott változata.

Definíció (kövezés)

- **Kezdőkonfiguráció:** Egy irányítatlan, egyszerű, összefüggő G gráf; egy $p: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlás
- **Lépéssorozat:** Vegyünk el 2 követ a v csúcs **egyik szomszédjáról**, és tegyünk 1 követ v -re.
- **Cél:** Elérni egy olyan $q: V(G) \rightarrow \mathbb{N}_0$ kőeloszlást, amely teljesít egy adott feltételt.



Lehetséges célok

- legalább 1 kő egy adott csúcson



Lehetséges célok

- legalább 1 kő egy adott csúcson $\implies$ ez a csúcs elérhető



Lehetséges célok

- legalább 1 kő egy adott csúcson $\implies$ ez a csúcs elérhető
- legalább 2 kő egy adott csúcson



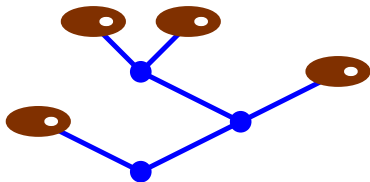
Lehetséges célok

- legalább 1 kő egy adott csúcson $\implies$ ez a csúcs elérhető
- legalább 2 kő egy adott csúcson $\implies$ ez a csúcs 2-elérhető
- legalább 1 kő minden csúcson
- ...

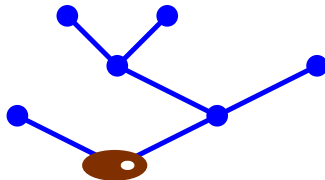


Lehetséges célok

- legalább 1 kő egy adott csúcson $\implies$ ez a csúcs elérhető
- legalább 2 kő egy adott csúcson $\implies$ ez a csúcs 2-elérhető
- legalább 1 kő minden csúcson
- ...



Start

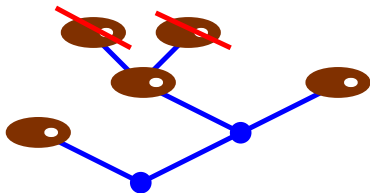


Goal

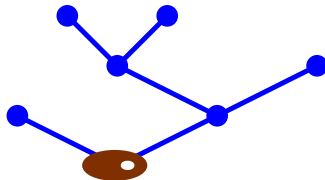


Lehetséges célok

- legalább 1 kő egy adott csúcson $\implies$ ez a csúcs elérhető
- legalább 2 kő egy adott csúcson $\implies$ ez a csúcs 2-elérhető
- legalább 1 kő minden csúcson
- ...



Start

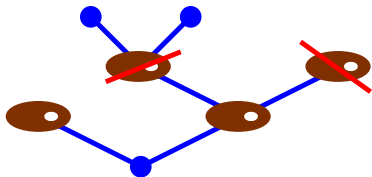


Goal

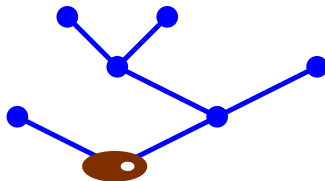


Lehetséges célok

- legalább 1 kő egy adott csúcson $\implies$ ez a csúcs elérhető
- legalább 2 kő egy adott csúcson $\implies$ ez a csúcs 2-elérhető
- legalább 1 kő minden csúcson
- ...



Start

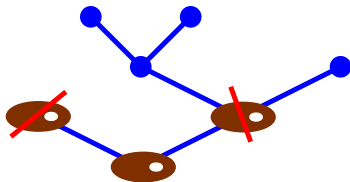


Goal

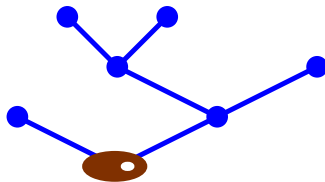


Lehetséges célok

- legalább 1 kő egy adott csúcson $\implies$ ez a csúcs elérhető
- legalább 2 kő egy adott csúcson $\implies$ ez a csúcs 2-elérhető
- legalább 1 kő minden csúcson
- ...



Start



Goal



Tétel (Hulbert, Kierstead; Watson (2005))

*Adott egy G gráf, egy p kőeloszlás és egy v csúcs. Annak eldöntése, hogy v elérhető-e **kövező** lépésekkel, NP-teljes feladat.*



Tétel (Hulbert, Kierstead; Watson (2005))

*Adott egy G gráf, egy p köeloszlás és egy v csúcs. Annak eldöntése, hogy v elérhető-e **kövező** lépésekkel, NP-teljes feladat.*

Tétel (Katona, Sieben (2016))

*Adott egy G gráf, egy p köeloszlás és egy v csúcs. Annak eldöntése, hogy v elérhető-e **murvázó** lépésekkel, NP-teljes feladat.*



Optimális kövezés és murvázás

- Mennyi az optimális murvázási szám, $\varrho_{\text{opt}}(G)$?



Optimális kövezés és murvázás

- Mennyi az optimális murvázási szám, $\varrho_{\text{opt}}(G)$?

Definíció

$\varrho_{\text{opt}}(G)$ az a minimális kőszám, amit *el lehet helyezni* a gráf csúcsaira úgy, hogy *bármely csúcs* elérhető *murvázó* lépések sorozatával.



Optimális kövezés és murvázás

- Mennyi az optimális murvázási szám, $\varrho_{\text{opt}}(G)$?

Definíció

$\varrho_{\text{opt}}(G)$ az a minimális kőszám, amit *el lehet helyezni* a gráf csúcsaira úgy, hogy *bármely csúcs* elérhető *murvázó* lépések sorozatával.

- Mennyi az optimális kövezési szám, $\pi_{\text{opt}}(G)$?

Definíció

$\pi_{\text{opt}}(G)$ az a minimális kőszám, amit *el lehet helyezni* a gráf csúcsaira úgy, hogy *bármely csúcs* elérhető *kövező* lépések sorozatával.



Optimális kövezés és murvázás

- Mennyi az optimális murvázási szám, $\varrho_{\text{opt}}(G)$?

Definíció

$\varrho_{\text{opt}}(G)$ az a minimális kőszám, amit *el lehet helyezni* a gráf csúcsaira úgy, hogy *bármely csúcs* elérhető *murvázó* lépések sorozatával.

- Mennyi az optimális kövezési szám, $\pi_{\text{opt}}(G)$?

Definíció

$\pi_{\text{opt}}(G)$ az a minimális kőszám, amit *el lehet helyezni* a gráf csúcsaira úgy, hogy *bármely csúcs* elérhető *kövező* lépések sorozatával.



Példák

P_n jelölje az n csúcsú és $n - 1$ élű utat.



Példák

P_n jelölje az n csúcsú és $n - 1$ élű utat.

Megfigyelés

$$\varrho_{opt}(P_3) = \pi_{opt}(P_3) = 2$$



Példák

P_n jelölje az n csúcsú és $n - 1$ élű utat.

Megfigyelés

$$\varrho_{\text{opt}}(P_3) = \pi_{\text{opt}}(P_3) = 2$$



Példák

P_n jelölje az n csúcsú és $n - 1$ élű utat.

Megfigyelés

$$\varrho_{opt}(P_3) = \pi_{opt}(P_3) = 2$$



Kapcsolat a murvázás és a kövezés között

Megfigyelés

$$\varrho_{opt}(G) \leq \pi_{opt}(G)$$

Bizonyítás.

Ha egy eloszlás megoldható kövező lépésekkel, akkor megoldható murvázó lépésekkel is. □



Megfigyelés

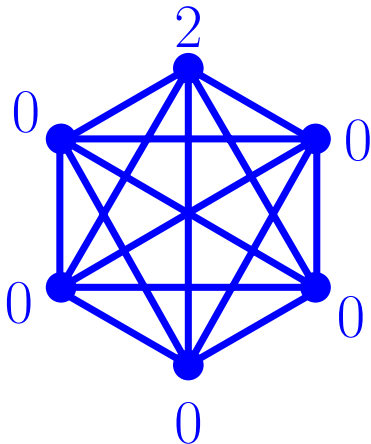
$$\varrho_{opt}(K_n) = \pi_{opt}(K_n) = ?$$



Példák

Megfigyelés

$$\varrho_{opt}(K_n) = \pi_{opt}(K_n) = 2$$



Példák

Megfigyelés

$$\pi_{opt}(P_9) = ?$$



Megfigyelés

$$\pi_{opt}(P_9) = 6$$



Példák

Megfigyelés

$$\varrho_{opt}(P_9) = ?$$



Példák

Megfigyelés

$$\varrho_{\text{opt}}(P_9) = 5$$



Ismert eredmények az optimális kövezésre

Az optimális kövezési szám ismert:

- Utakra: $\pi_{\text{opt}}(P_n) = \lceil 2n/3 \rceil$ Pachter, Snevily, Voxman (1995)
- Körökre: $\pi_{\text{opt}}(C_n) = \lceil 2n/3 \rceil$ Bunde et al. (2008)
- Létrákra: Bunde et al. (2008)
- Teljes m elágazású fákra: Fu, Shiue (2000)
- Hernyókra (Caterpillars): Fu, Shiue (2009)
- d -dimenziós kockákra: $\pi_{\text{opt}}(Q^d) = (4/3)^{d+O(\log d)}$ Moews (1998)



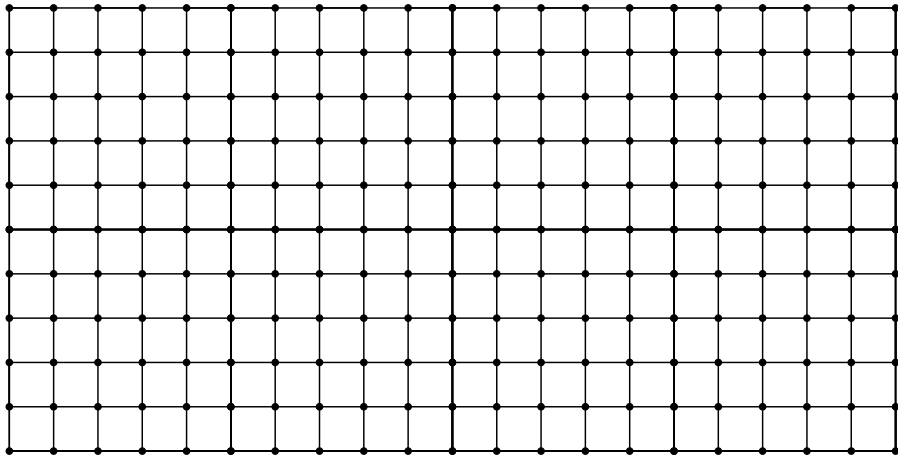
Ismert eredmények az optimális murvázásra

Az optimális murvázási szám ismert:

- Utakra: $\varrho_{\text{opt}}(P_n) = \lceil (n+1)/2 \rceil$ Belford, Sieben (2009)
- Körökre: $\varrho_{\text{opt}}(C_n) = \lceil n/2 \rceil$ Belford, Sieben (2009)
- Hernyókra: Papp (2010)
- d -dimenziós kockákra: $\varrho_{\text{opt}}(Q^d)$ ahol $d \leq 5$ Belford, Sieben (2009)



Nagy rácsok optimális kövezése



Nagy rácsok optimális kövezése, felső korlát

Természetes konstrukció:

$$\pi_{opt}(P_n \square P_n) \leq \frac{4}{13} n^2 + o(n^2)$$

Xue, Yeger (2017)



Nagy rácsok optimális kövezése, felső korlát

Természetes konstrukció:

$$\pi_{opt}(P_n \square P_n) \leq \frac{4}{13}n^2 + o(n^2)$$

Xue, Yerger (2017)

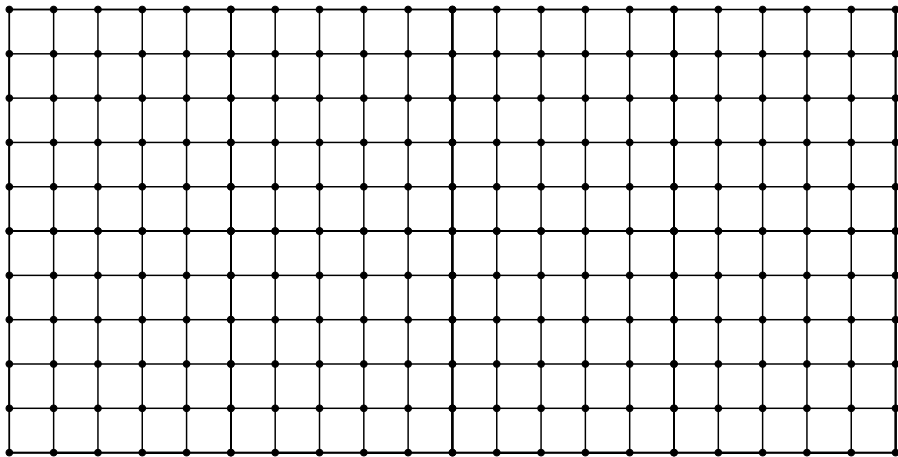
Tétel (Győri, Katona, Papp (2020))

$$\pi_{opt}(P_n \square P_n) \leq \frac{2}{7}n^2 + O(n) = \frac{2}{7}v(G) + o(v(G)).$$

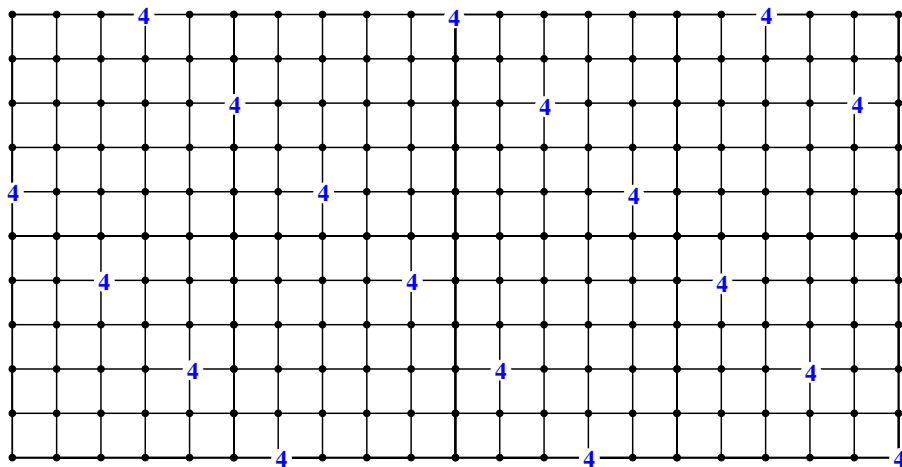
$$0.285 \approx \frac{2}{7} < 0.307 \approx \frac{4}{13}$$



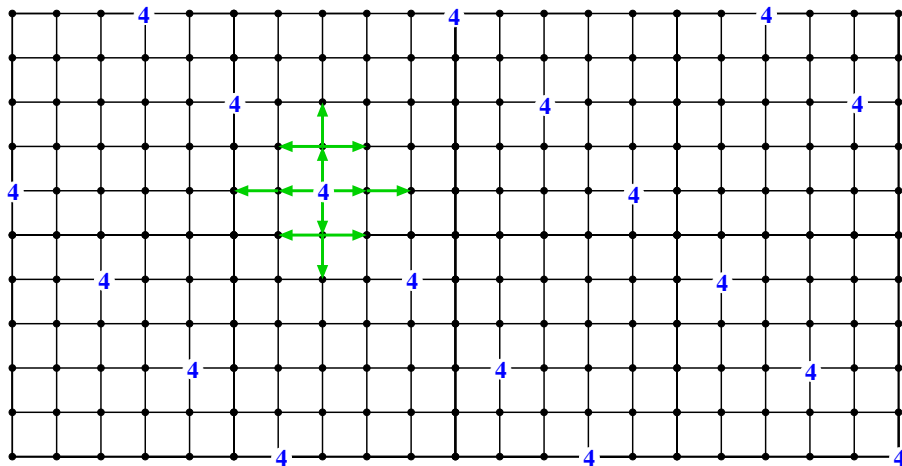
Nagy rácsok optimális kövezése, felső korlát



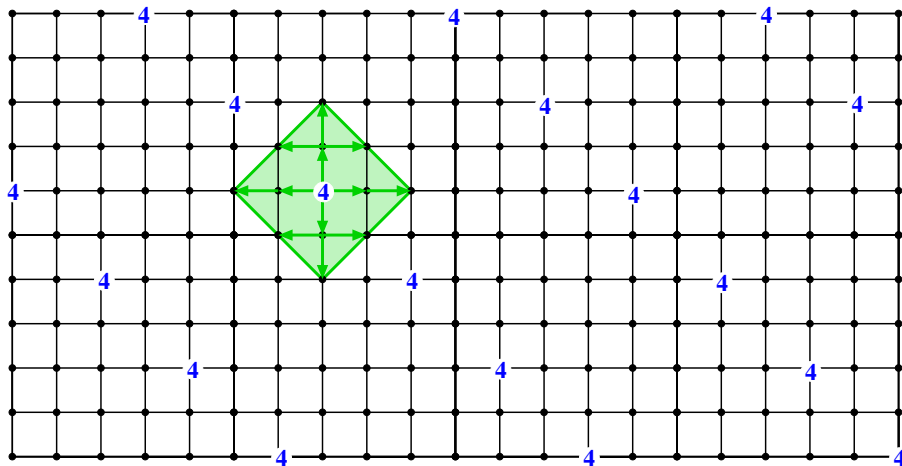
Nagy rácsok optimális kövezése, felső korlát



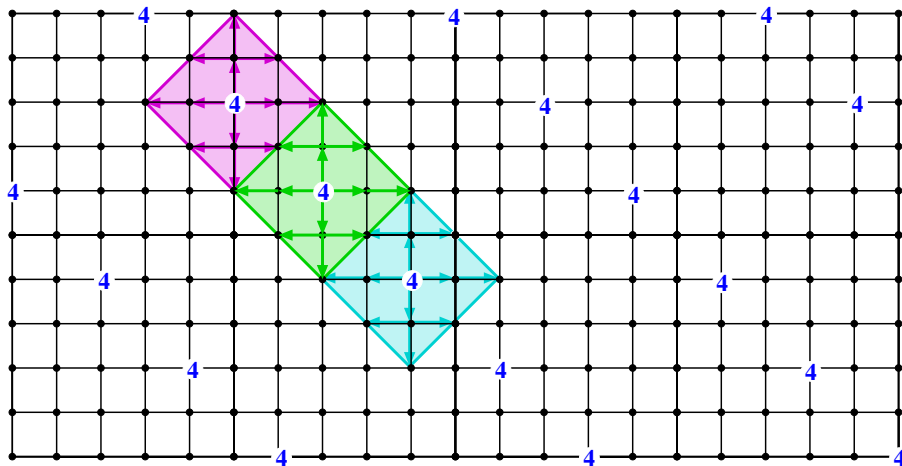
Nagy rácsok optimális kövezése, felső korlát



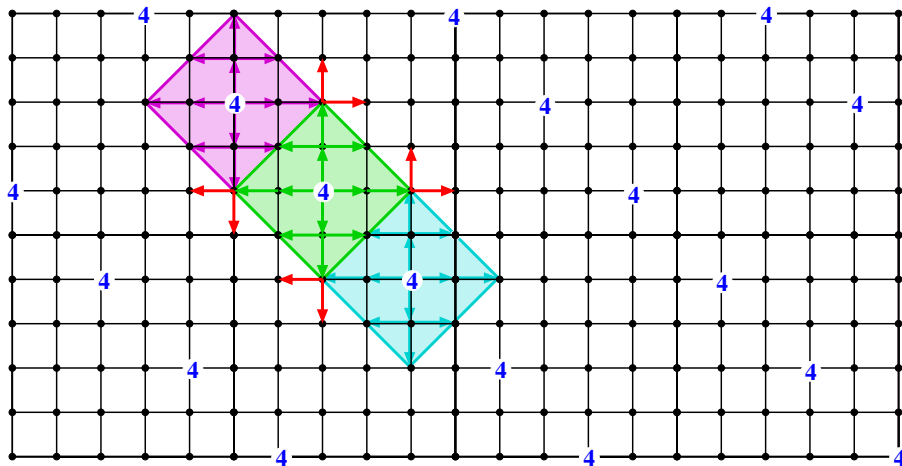
Nagy rácsok optimális kövezése, felső korlát



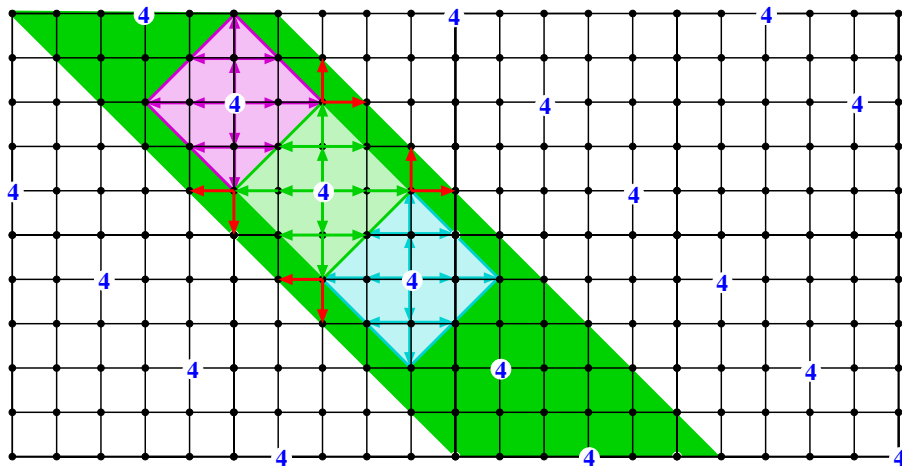
Nagy rácsok optimális kövezése, felső korlát



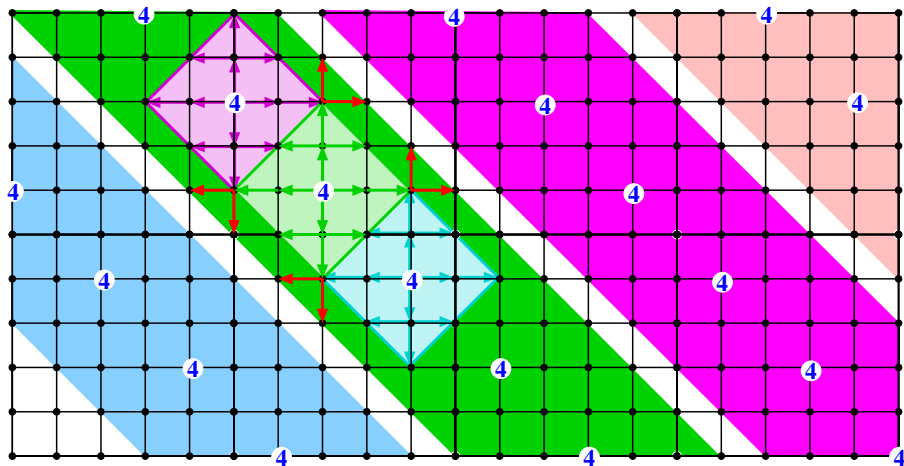
Nagy rácsok optimális kövezése, felső korlát



Nagy rácsok optimális kövezése, felső korlát



Nagy rácsok optimális kövezése, felső korlát



Nagy rácsok optimális kövezése, alsó korlát

Tétel (Győri, Katona, Papp (2020))

$$\frac{2}{13}v(G) \leq \pi_{\text{opt}}(P_n \square P_n).$$

$$\frac{1}{9} \approx 0.111 < \frac{2}{13} = 0.153 < 0.285 \approx \frac{2}{7}$$



Nagy rácsok optimális kövezése, alsó korlát

Tétel (Győri, Katona, Papp (2020))

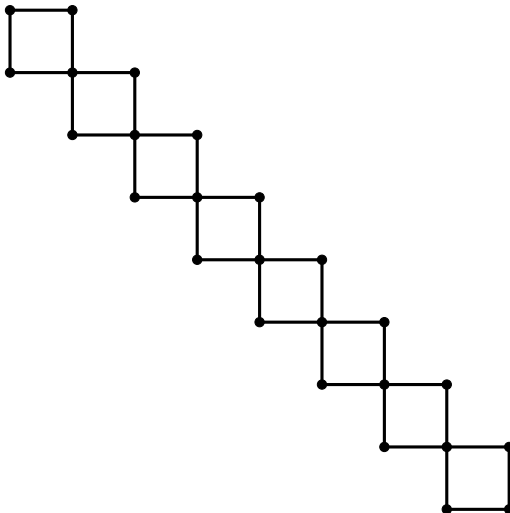
$$\frac{2}{13}v(G) \leq \pi_{\text{opt}}(P_n \square P_n).$$

$$\frac{1}{9} \approx 0.111 < \frac{2}{13} = 0.153 < 0.285 \approx \frac{2}{7}$$

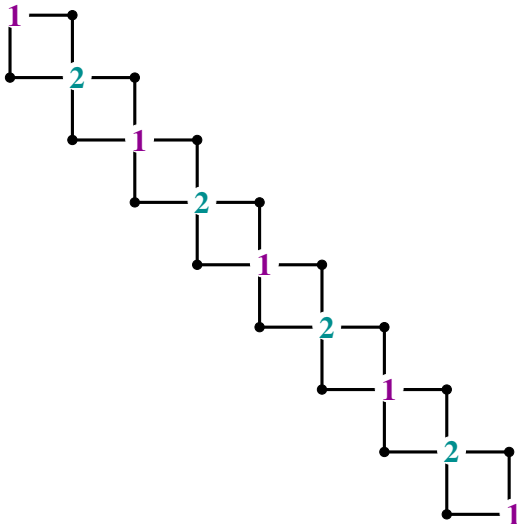
A bizonyítás meglehetősen bonyolult.



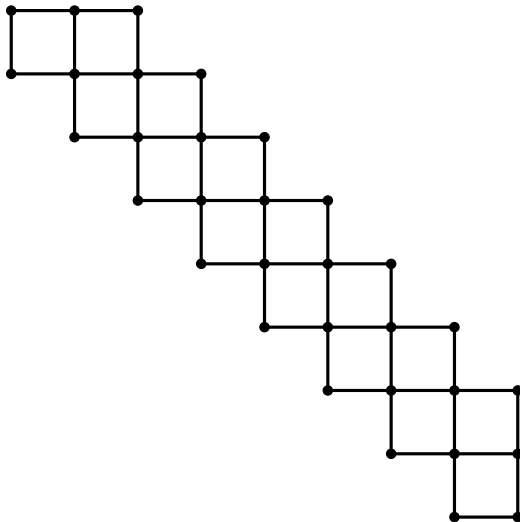
Lépcsők optimális kövezése



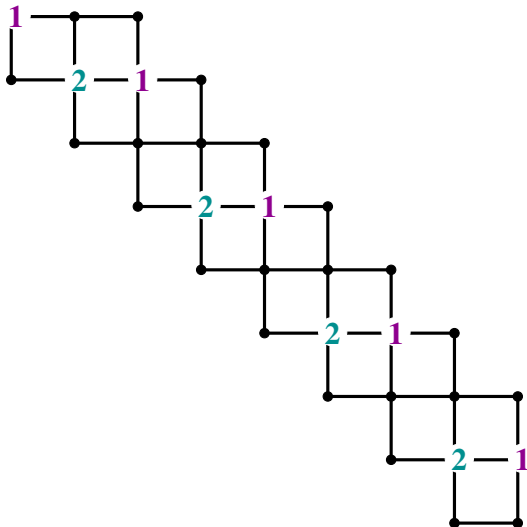
Lépcsők optimális kövezése



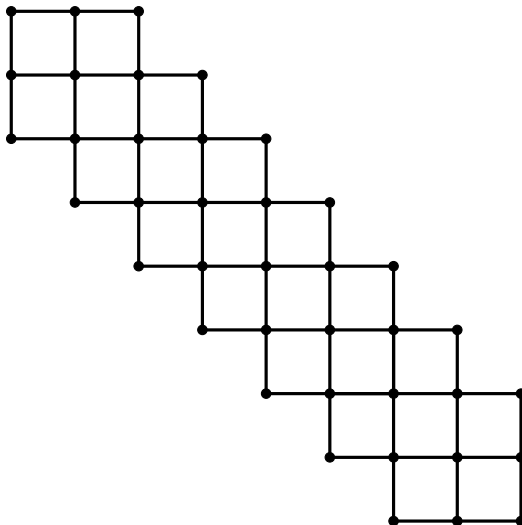
Lépcsők optimális kövezése



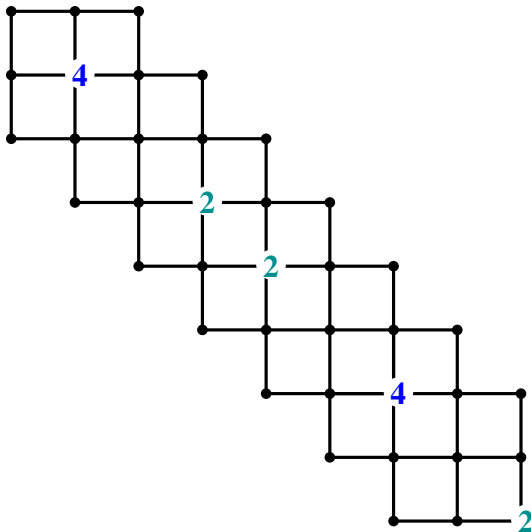
Lépcsők optimális kövezése



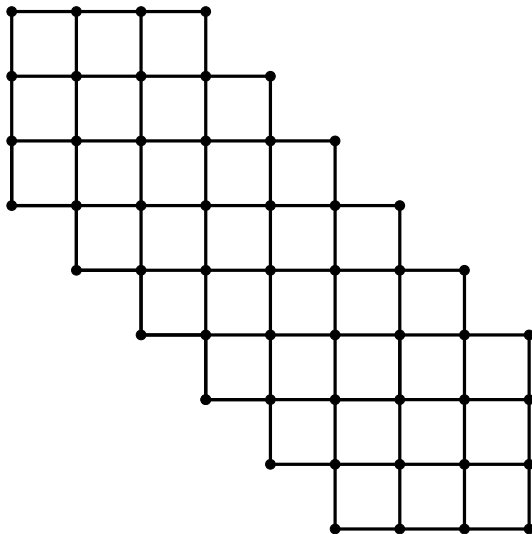
Lépcsők optimális kövezése



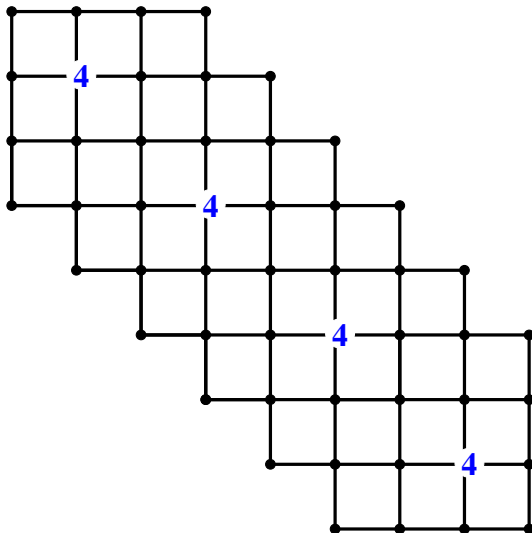
Lépcsők optimális kövezése



Lépcsők optimális kövezése



Lépcsők optimális kövezése



Lépcsők optimális kövezése

Tétel (Győri, Katona, Papp, Tompkins (2019))

Ezek élesek egy additív konstans erejéig.



Lépcsők optimális kövezése

Tétel (Győri, Katona, Papp, Tompkins (2019))

Ezek élesek egy additív konstans erejéig.

Optimális kövezési sűrűségek lépcsőkre

3-átlós lépcső: $\frac{1}{2} = 0.5$

4-átlós lépcső: $\frac{3}{8} = 0.375$

5-átlós lépcső: $\frac{8}{25} = 0.32$

6-átlós lépcső: $\frac{1}{3} = 0.33$

7-átlós lépcső: $\frac{2}{7} = 0.2857$

Szélesebb lépcsők esetén a probléma nehezebbnek tűnik, mivel az optimális eloszlásban a kövek már nem a középvonal közelében helyezkednek el.



Nagy rácsok optimális murvázása, felső korlát

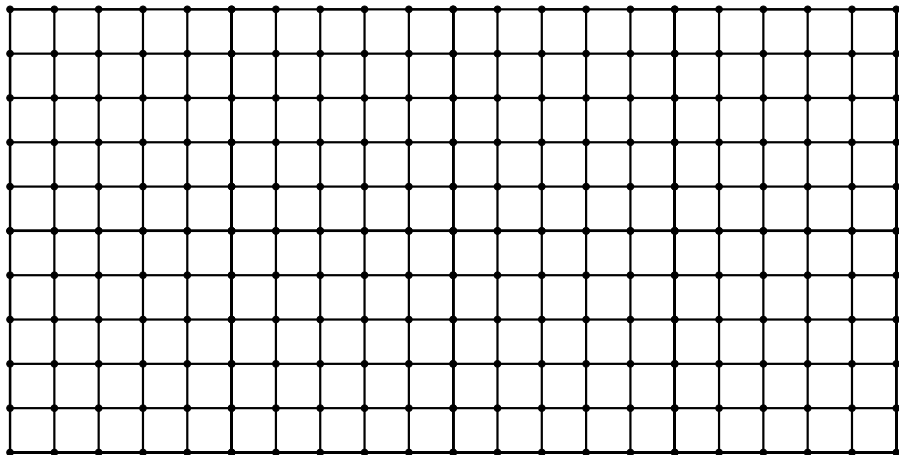
Tétel

$$\rho_{\text{opt}}(P_n \square P_n) \leq \frac{1}{5}n^2 + O(n) = \frac{1}{5}v(G) + o(v(G)).$$

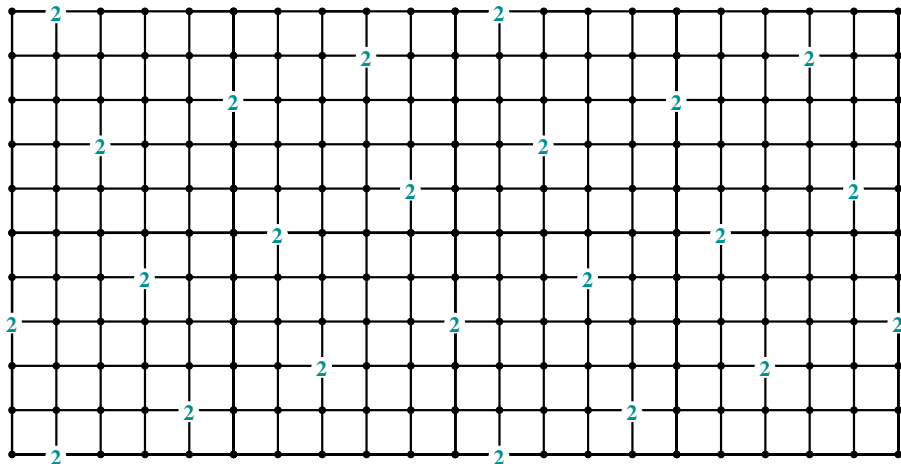
$$\frac{1}{5} = 0.2 < 0.285 \approx \frac{2}{7}$$



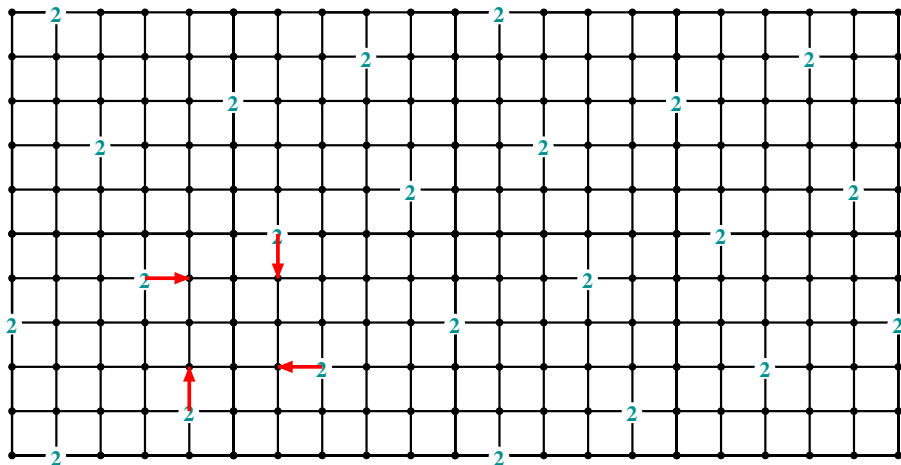
Nagy rácsok optimális murvázása, felső korlát



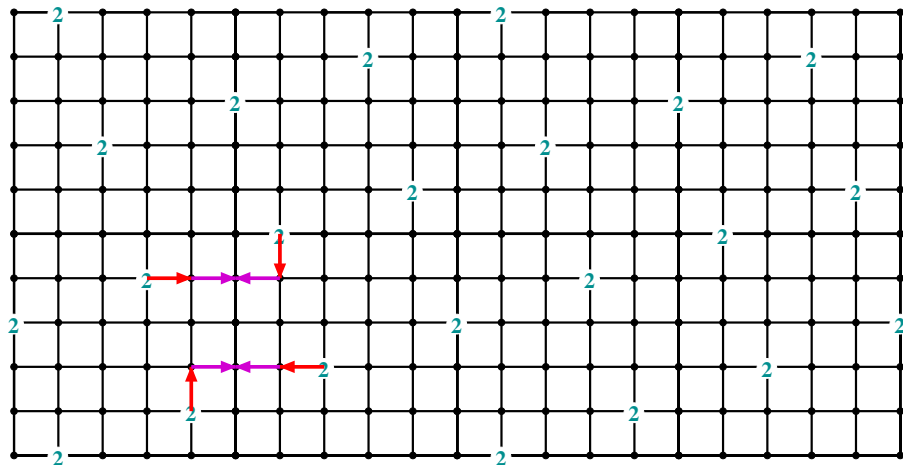
Nagy rácsok optimális murvázása, felső korlát



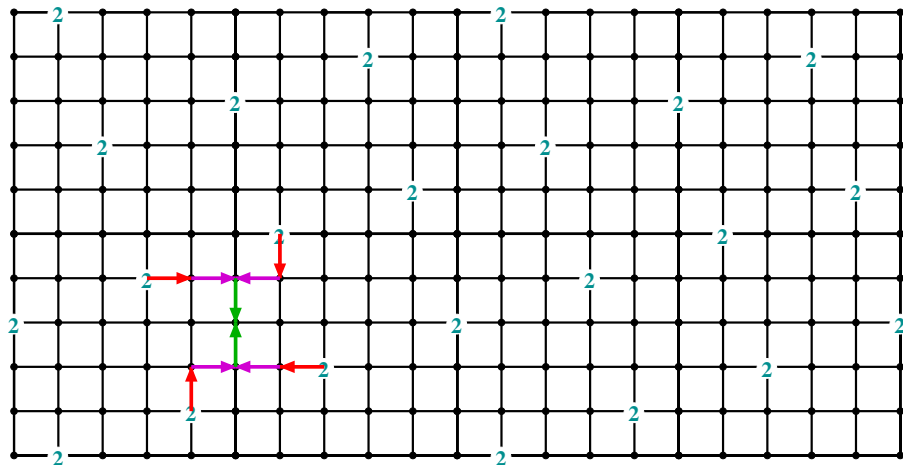
Nagy rácsok optimális murvázása, felső korlát



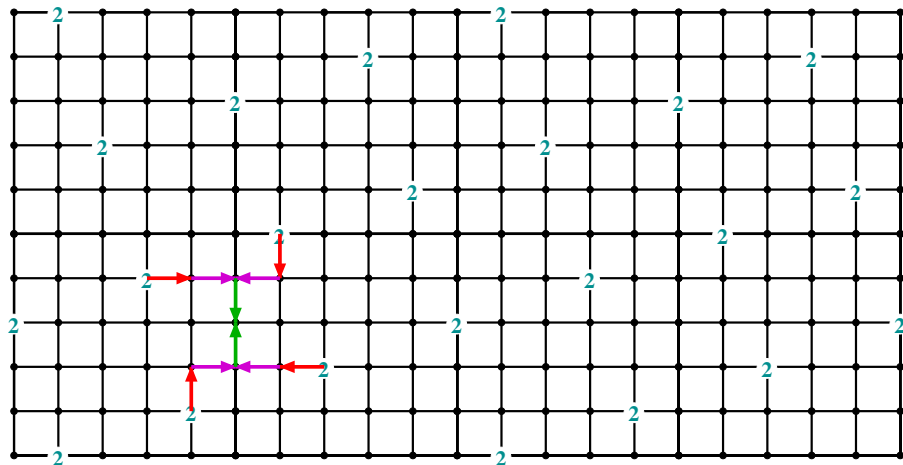
Nagy rácsok optimális murvázása, felső korlát



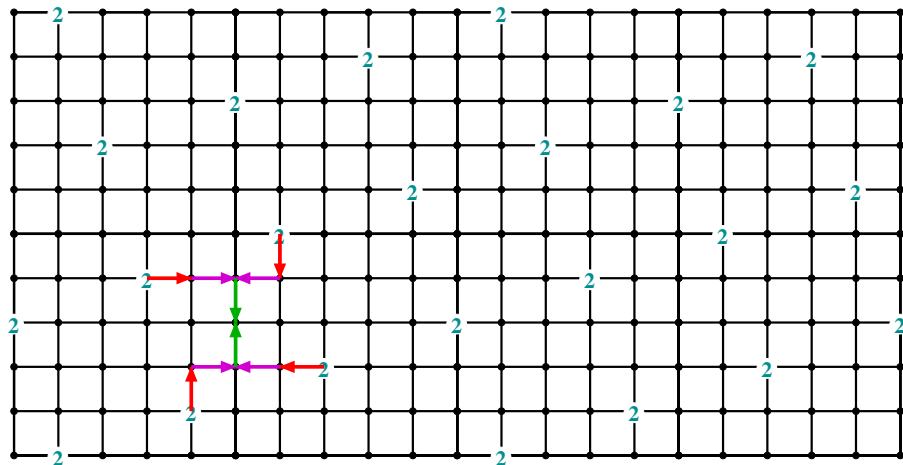
Nagy rácsok optimális murvázása, felső korlát



Nagy rácsok optimális murvázása, felső korlát



Nagy rácsok optimális murvázása, felső korlát



Nagy rácsok optimális murvázása, alsó korlát

Egyszerű alsó korlát frakcionális murvázással:

$$\frac{1}{9}v(G) \leq \rho_{opt}(P_n \square P_n).$$



Nagy rácsok optimális murvázása, alsó korlát

Egyszerű alsó korlát frakcionális murvázással:

$$\frac{1}{9}v(G) \leq \rho_{opt}(P_n \square P_n).$$

Tétel

$$\frac{5}{37}v(G) \leq \rho_{opt}(P_n \square P_n).$$

$$\frac{1}{9} \approx 0.111 < \frac{5}{37} = 0.1350 < 0.2 = \frac{1}{5}$$



Nagy rácsok optimális murvázása, alsó korlát

Egyszerű alsó korlát frakcionális murvázással:

$$\frac{1}{9}v(G) \leq \rho_{opt}(P_n \square P_n).$$

Tétel

$$\frac{5}{37}v(G) \leq \rho_{opt}(P_n \square P_n).$$

$$\frac{1}{9} \approx 0.111 < \frac{5}{37} = 0.1350 < 0.2 = \frac{1}{5}$$

A bizonyítás hasonló a kövezés esetéhez.



Köszönöm a figyelmet!

